

DM de mathématiques n°2

Logique et rédaction – Corrigé

Résoudre dans $\mathbb{R}$:

$$8 - 2x \leq \sqrt{2x^2 - 6x + 4}$$

L'équation n'a un sens que si

$$\begin{aligned} 2x^2 - 6x + 4 &\geq 0 \\ \iff x^2 - 3x + 2 &\geq 0 \\ \iff (x-1)(x-2) &\geq 0 \\ \iff x \leq 1 \text{ ou } x &\geq 2 \end{aligned}$$

Ainsi, l'équation n'a un sens que si $x \in \mathcal{D}$ avec $\mathcal{D} =]-\infty, 1] \cup [2, +\infty[$.

- Si $8 - 2x \geq 0$, i.e. $x \leq 4$, on obtient

$$\begin{aligned} (8 - 2x)^2 &\leq 2x^2 - 6x + 4 \\ \iff 4 \times (4 - x)^2 &\leq 2x^2 - 6x + 4 \\ \iff 2 \times (16 - 8x + x^2) &\leq x^2 - 3x + 2 \\ \iff 2x^2 - 16x + 32 &\leq x^2 - 3x + 2 \\ \iff x^2 - 13x + 30 &\leq 0 \end{aligned}$$

Le discriminant de ce polynôme est

$$\begin{aligned} \Delta &= 13^2 - 4 \times 30 \\ &= 169 - 120 \\ &= 49 \end{aligned}$$

Il y a donc deux racines réelles :

$$x_- = \frac{13-7}{2} = 3 \quad x_+ = \frac{13+7}{2} = 10$$

Donc $x^2 - 13x + 30 \leq 0 \iff x \in [3, 10]$. Cependant, comme $x \leq 4$, cela équivaut à $x \in [3, 4]$ (on vérifie aussi que $x \in \mathcal{D}$).

Ainsi, dans ce cas,

$$\mathcal{S}_1 = [3, 4]$$

- Si $8 - 2x < 0$, i.e. $x > 4$, comme $\sqrt{2x^2 - 6x + 4} \geq 0$, on a bien

$$8 - 2x \leq \sqrt{2x^2 - 6x + 4}$$

Ainsi, dans ce cas $\mathcal{S}_2 = [4, +\infty[$.

Finalement,

$$\mathcal{S} = \mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2 = [3, +\infty[$$

On note $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = u_1 = 1$ et la relation $u_{n+2} = u_{n+1} + \frac{u_n}{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

- 1) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $u_n \leq n$.

On raisonne par récurrence double.

- On a $u_1 = 1 \leq 1$ et $u_2 = 1 \leq 2$, donc la propriété est vérifiée pour $n = 1$ et $n = 2$.
- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose que $u_n \leq n$ et $u_{n+1} \leq n+1$. Montrons que $u_{n+2} \leq n+2$.

$$\begin{aligned} u_{n+2} &= u_{n+1} + \frac{u_n}{n+1} \\ &\leq n+1 + \frac{n}{n+1} \end{aligned}$$

de sorte qu'il suffit de montrer que

$$\begin{aligned} n+1 + \frac{n}{n+1} &\leq n+2 \\ \iff \frac{n}{n+1} &\leq 1 \\ \iff n &\leq n+1 \end{aligned}$$

Or, cette dernière assertion est vraie. D'où l'assertion de départ est vérifiée.

- 2) Montrer que pour tout $n \geq 2$, on a $u_n \geq \sqrt{n+1}$.

On raisonne par récurrence double.

- Montrons que $u_2 \geq \sqrt{3}$ et $u_3 \geq \sqrt{4} = 2$. On a

$$\begin{aligned} u_2 &= u_1 + \frac{u_0}{0+1} = 1+1 = 2 \geq \sqrt{3} \\ u_3 &= u_2 + \frac{u_1}{1+1} = 2 + \frac{1}{1+1} = \frac{5}{2} \geq 2 \end{aligned}$$

donc la propriété est vérifiée pour $n = 2$ et $n = 3$.

- Soit $n \geq 2$ un entier. On suppose $u_n \geq \sqrt{n+1}$ et $u_{n+1} \geq \sqrt{n+2}$. Montrons que $u_{n+2} \geq \sqrt{n+3}$. On a

$$\begin{aligned} u_{n+2} &= u_{n+1} + \frac{u_n}{n+1} \\ &\geq \sqrt{n+2} + \frac{\sqrt{n+1}}{n+1} \end{aligned}$$

donc il suffit de montrer que :

$$\begin{aligned} & \sqrt{n+2} + \frac{\sqrt{n+1}}{n+1} \geq \sqrt{n+3} \\ \Leftrightarrow & \left(\sqrt{n+2} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} \right)^2 \geq n+3 \\ \Leftrightarrow & n+2 + \frac{1}{n+1} + 2\frac{\sqrt{n+2}}{\sqrt{n+1}} \geq n+3 \\ \Leftrightarrow & 2\frac{\sqrt{n+2}}{\sqrt{n+1}} \geq 1 - \frac{1}{n+1} \\ \Leftrightarrow & 2\sqrt{n+2}\sqrt{n+1} \geq n+1-1 \\ \Leftrightarrow & 2\sqrt{n+2}\sqrt{n+1} \geq n \end{aligned}$$

Or, $\sqrt{n+2} \geq \sqrt{n}$ et $\sqrt{n+1} \geq \sqrt{n}$, donc leur produit est plus grand que n : l'inégalité est bien vérifiée. On en déduit que la propriété est vraie au rang $n+2$.

Finalement, on a $u_n \geq \sqrt{n+1}$ pour tout entier $n \geq 2$.

Le but de cet exercice est de déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ qui vérifient l'équation fonctionnelle suivante :

$$(E) : \quad \forall m, n \in \mathbb{N} \quad f(m+n) = f(m)f(n)$$

On se donne f une fonction solution de (E) .

- 1) Déterminer les deux seules valeurs possibles pour $f(0)$. On les notera α et β avec $\alpha < \beta$.

Pour $m = n = 0$, on obtient

$$\begin{aligned} f(0) &= f(0)^2 \\ \Rightarrow f(0) \times (1 - f(0)) &= 0 \\ \Rightarrow f(0) = 0 \text{ ou } f(0) &= 1 \end{aligned}$$

Ainsi, $\alpha = \boxed{0}$ et $\beta = \boxed{1}$.

- 2) On suppose que $f(0) = \alpha$. Déterminer f .

Comme $f(0) = 0$, alors pour tout $m \in \mathbb{N}$ et pour $n = 0$, on a :

$$f(m) = f(m) \times f(0) = 0$$

ce qui entraîne que f est la fonction nulle.

- 3) On suppose que $f(0) = \beta$ et on pose $a = f(1)$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, exprimer $f(n)$ en fonction de a .

Si $f(0) = 1$, alors pour $m = n = 1$, on a

$$f(2) = f(1)f(1) = f(1)^2 = a^2$$

Pour $m = 2$ et $n = 1$, on a :

$$f(3) = f(2)f(1) = f(1)^3 = a^3$$

et par récurrence immédiate (il faut d'abord avoir mis en évidence le motif sur la copie pour pouvoir écrire cela !), on en déduit que

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad f(n) = a^n$$

On conclut donc que f est de la forme suivante :

$$f(n) = a^n$$

avec la convention $0^0 = 1$. On ne peut pas écrire " $f(n) = a^n$ " sans préciser cette convention car avec $a = n = 0$, la valeur de $f(0)$ serait " 0^0 ", ce qui n'est pas autorisé !

- 4) Quelles sont toutes les solutions de (E) ? On précisera le raisonnement utilisé.

On raisonne par analyse-synthèse.

- Analyse : dans les questions précédentes, on a montré que si f est une fonction solution de (E) , alors f est la fonction nulle ou une fonction telle que

$$(*) \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad f(n) = a^n$$

avec $a \in \mathbb{N}$.

- Synthèse : vérifions si ces fonctions sont solutions.

– Si f est la fonction nulle, alors pour tous $m, n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{cases} f(m+n) = 0 \\ f(m)f(n) = 0 \end{cases}$$

donc f est solution.

– Si f vérifie $(*)$, alors (pour tous $m, n \in \mathbb{N}$) :

$$\begin{cases} f(m+n) = a^{m+n} \\ f(m)f(n) = a^m a^n = a^{m+n} \end{cases}$$

donc f est solution.

Finalement, les solutions de (E) sont la fonction nulle et toute fonction de la forme $n \mapsto a^n$ avec $a \in \mathbb{N}$, sous la convention $0^0 = 1$.

On verra plus tard qu'on peut écrire l'ensemble $\mathcal{S}$ ainsi :

$$\mathcal{S} = \{n \mapsto 0\} \cup \left\{ n \mapsto a^n \mid a \in \mathbb{N} \right\}$$